

# Introducción a los asistentes de pruebas basados en teoría de tipos dependientes, en específico “Coq” (y resultados parciales sobre Redex $\rightarrow$ Coq)

UMA 2023 Salta

Mallku Soldevila<sup>1</sup>, Beta Ziliani<sup>2</sup>

<sup>1</sup>FAMAF/UNC y CONICET, <sup>2</sup>FAMAF/UNC y Manas.Tech

# Resumen

- Fundamentos (ideas de la matemática de primera mitad del siglo pasado).
- Coq.
- Nuestro trabajo:
  - ▶ Redex  $\rightarrow$  Coq.

# Fundamentos

(o cómo podemos representar computacionalmente  
nocións de lógica matemática)

# Fundamentos

Intuicionismo (L.E.J. Brouwer, desde 1908 aprox.)<sup>1</sup> <sup>2</sup>

- Basado en ideas filosóficas sobre la naturaleza de objetos matemáticos diferentes a las presentes en la matemática clásica.
- Opuesto al *platonismo*: los objetos matemáticos no existen más allá de nuestro intelecto. Son solamente construcciones de nuestra mente.

---

<sup>1</sup>Mauricio Guillermo. *Introducción a la Realizabilidad Intuicionista*. ECI'21.

<sup>2</sup>Harrie de Swart. *Philosophical and Mathematical Logic*. Springer, 2018.

# Fundamentos: Intuicionismo

- Postura clásica: la validez o no validez de un enunciado depende de la naturaleza (objetiva) de los objetos de los que el enunciado habla, y no tanto de si disponemos o no de métodos efectivos para determinar esto.
- Intuicionismo: un enunciado es cierto sólo si tenemos una construcción matemática, una prueba, que hace evidente la validez del enunciado.
- Se enmarca dentro de lo que, más ampliamente, se conoce como *constructivismo*.

# Fundamentos: Intuicionismo

Semántica de Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK) (desde 1928, aprox.)

- Identifica la idea (la semántica) de enunciado verdadero con la idea de enunciado *demostrable*, y la idea de enunciado falso con la idea de enunciado *refutable*.
- La semántica de los conectivos lógicos se va a explicar en términos de la construcción de la correspondiente prueba.

# Fundamentos: Semántica BHK

- $A \wedge B$ : 2 piezas de información: prueba de  $A$  y prueba de  $B$ .
- $A \vee B$ : 2 piezas de información: cuál es el disyunto demostrable y prueba correspondiente de ese disyunto.
- $A \rightarrow B$ : método efectivo para transformar pruebas de  $A$  en pruebas de  $B$ .
- $\exists x \in A, B(x)$ : testigo  $x \in A$ , y una prueba que demuestre  $B(x)$ .
- $\forall x \in A, B(x)$ : método efectivo que transforma todo elemento  $x \in A$  en una prueba que demuestre  $B(x)$ .
- No hay pruebas para  $\perp$ .
- $\neg A$  se define como  $A \rightarrow \perp$ .

# Fundamentos: Semántica BHK

- Algunas consecuencias:
  - ▶ No tiene sentido asumir  $\forall A, A \vee \neg A$ .
    - ★ Sí puede ser cierto  $A \vee \neg A$  para cierto  $A$  específico, pero tengo que probarlo.
  - ▶  $\neg\neg A \not\rightarrow A$
- Conexión entre noción de prueba intuicionista y recursión:
  - ▶ Realizabilidad de Kleene: relación entre funciones recursivas y pruebas de la aritmética intuicionista de Heyting.



# Fundamentos: Semántica BHK

## Deducción natural para la lógica intuicionista (fragmento).

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B} \quad \frac{\overline{A \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B}$$
$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \wedge B} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \wedge B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \wedge B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B}$$

Va a ser semejante a la deducción natural para lógica clásica, reemplazando la reducción al absurdo:  $\frac{\Gamma, \neg A \vdash_{\mathcal{L}} \perp}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A}$ , por el

principio de explosión:  $\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \perp}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A}$ .

# Fundamentos

$\lambda$ -cálculo<sup>3 4</sup>

- Alonzo Church, 1932/33.
- Teoría sobre funciones en términos de reglas de reescritura, y no como conjuntos de pares ordenados.
- Partes constitutivas: un lenguaje y relaciones con dominio en este lenguaje.
- Veremos la formulación moderna simplificada.<sup>5</sup>

---

<sup>3</sup>Barendregt, H. P. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. North Holland, Amsterdam (1984).

<sup>4</sup>Felleisen M., Findler R. B., Flatt M. *Semantics Engineering with PLT Redex*. The MIT Press (2009).

<sup>5</sup>Formulación original: Church A. *A Set of Postulates for the Foundation of Logic*.

# Fundamentos: $\lambda$ -cálculo

## Sintaxis

$$t ::= \lambda x. t \mid x \mid t t$$

## Relaciones entre términos (términos que se “comportan” del mismo modo)

Evaluación de una función (noción de reducción):

$$\rightarrow_{\beta} : (\lambda x. t) u \rightarrow_{\beta} t[u/x] \quad (t[u/x]: \text{subst. consistente sin captura})$$

“Los nombres de variables no importan” (conversión):

$$\alpha : \text{renombrado consistente de variables}$$

“Una función está unívocamente definida por sus evaluaciones”:

$$\rightarrow_{\eta} : (\lambda x. t x) \eta t \quad (\text{con } x \notin FV(t))$$

## Fundamentos: $\lambda$ -cálculo

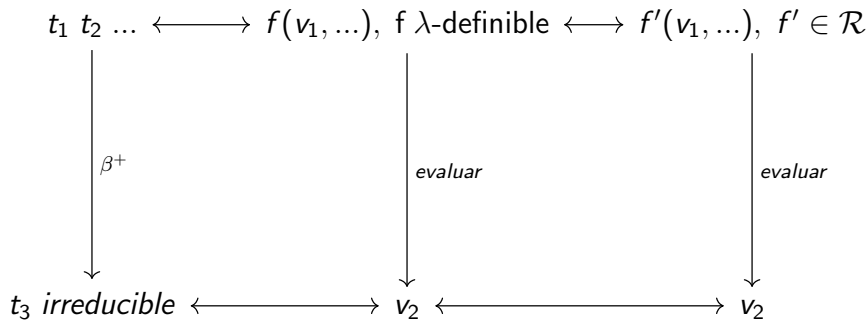
- El cálculo original se demostró inconsistente (paradoja de Kleene-Rosser).<sup>6</sup>
- La laxitud de las reglas de construcción del cálculo permiten cosas como “funciones aplicadas a sí mismas”:
  - ▶ Por ejemplo:  $\Omega \doteq (\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$  (término irreducible).
  - ▶ Otro ejemplo:  $Y \doteq \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$
- Si agregamos “tipos” (más adelante) para poder clasificar cosas como  $Y$ , todo tipo va a estar habitado (manifestación de inconsistencia en una teoría de tipos).

---

<sup>6</sup>Curry H. *The paradox of Kleene and Rosser.*

## Fundamentos: $\lambda$ -cálculo

Sin embargo: es posible representar todas las funciones recursivas de Gödel ( $\mathcal{R}$ ; vía  $\lambda$ -definibilidad).



...y no-terminación de la reducción se corresponde con la no definición de una función sobre cierto valor.

# Fundamentos: $\lambda$ -cálculo

¿Por qué?

- Puedo representar información: por ej.,  $\mathbb{N} + 0$  usando numerales de Church.

$$0 = \lambda s. \lambda z. z$$

$$1 = \lambda s. \lambda z. s z$$

...

$$n = \lambda s. \lambda z. s^n z$$

- Puedo hacer aritmética: por ej., sumar 1.

$$\text{succ} = \lambda n. \lambda s. \lambda z. s (n s z)$$

$$\text{succ } 0 = \text{succ } (\lambda s. \lambda z. z) \rightarrow_{\beta} \lambda s. \lambda z. s ((\lambda s. \lambda z. z) s z)$$

$$\rightarrow_{\beta} \dots$$

$$\rightarrow_{\beta} \lambda s. \lambda z. s z = 1$$

# Fundamentos: $\lambda$ -cálculo

- Toda función tiene punto fijo, y tengo un operador de (menor<sup>7</sup>) punto fijo.

$$Y \doteq \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$
$$g (Y g) \equiv Y g, \text{ con } g \text{ una abstracción } \lambda.^8$$

- ...entonces puedo definir funciones recursivas.
- Todo esto (y más) generó entusiasmo: conjetura de Church-Turing: *“hemos tenido éxito capturando la noción de función computable”*.

---

<sup>7</sup> Scott D. *Lambda Calculus: Some Models, Some Philosophy*

<sup>8</sup> Con  $\equiv$  la clausura reflexiva-simétrica-transitiva y compatible de  $\rightarrow_\beta$ .

# Fundamentos

$\lambda$ -cálculo simplemente tipado

- Alonzo Church, 1940.
- Eliminamos términos que se “comportan mal” (ej.: funciones que se pueden aplicar a sí mismas).
- ...o, nos quedamos sólo con los términos que se comportan bien, usando teoría de tipos (este es el estilo de una teoría de tipos)



# Fundamentos

## Teoría de tipos<sup>9</sup>

- Bertrand Russell, 1903.<sup>10</sup>
- Desarrollada como instrumento para definir objetos evitando las paradojas en los fundamentos de la matemática que estaban siendo identificadas en la época.
- La teoría se preocupa por clasificar objetos utilizando la noción primitiva de “tipo”.
- El juicio básico que le interesa formular a una teoría de tipos es: “el objeto  $a$  tiene tipo  $A$ ”, denotado  $a : A$ .

---

<sup>9</sup>The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. 2013.

<sup>10</sup>Russell B. *The Principles of Mathematics*.

# Fundamentos: Teoría de tipos

- El tipo a su vez expresa especificaciones detalladas de los objetos que clasifica. Esto da lugar a principios de razonamiento y manipulación de estos objetos.

# Fundamentos: Teoría de tipos

Vamos a pensar y a definir a los objetos y a los tipos en términos de lo siguiente:

- **Reglas de formación**, que especifican cómo formar un nuevo tipo.

*Ej.: dados tipos  $A$  y  $B$ , podemos formar el tipo función  $A \rightarrow B$ .*

- **Constructores o reglas de introducción**, que expliquen cómo construir habitantes del tipo.

*Ej.: utilizando el  $\lambda$ -cálculo, el tipo función tiene un constructor: las abstracciones  $\lambda$ .*

- **Reglas de eliminación**, que indiquen cómo utilizar habitantes del tipo.

*Ej.: el tipo función tiene un eliminador: aplicación de funciones.*

# Fundamentos: Teoría de tipos

Vamos a pensar y a definir a los objetos y a los tipos en términos de lo siguiente:

- **Regla de cómputo**, que indica (define) cómo opera un eliminador sobre un constructor.  
*Ej., para el tipo función, esto es lo que expresa la  $\beta$ -reducción.*
- **Un principio de unicidad** (opcional), útil para razonar sobre enunciados que hablan de “igualdad” entre objetos.  
*Ej., para el tipo función, esto es lo que expresa la  $\eta$ -reducción: una función está unívocamente definida por sus evaluaciones.*

# Fundamentos: Teoría de tipos

- Teoría de tipos se va a interesar por hacer juicios sobre el tipo de las reglas de introducción y de eliminación.
- Las reglas de cómputo y los principios de unicidad son enunciados de naturaleza diferente a los juicios de tipo.

# Fundamentos

$\lambda$ -cálculo extendido con productos (como tipos primitivos), simplemente tipado.<sup>11</sup> Relación de tipado (fragmento):

$$\frac{}{x : A \vdash_{\mathcal{T}} x : A}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{T}} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \lambda x : A. t : A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} u : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t u : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t : A \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} u : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} (t, u) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t : A \times B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \pi_1 t : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t : A \times B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \pi_2 t : B}$$

<sup>11</sup>Wadler P. *Proofs are Programs: 19th Century Logic and 21st Century Computing.*

# Fundamentos: $\lambda$ -cálculo simplemente tipado

Propiedades:

- Reducción preserva tipos:

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t : A \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} u : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} (t, u) : A \times B}}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \pi_1((t, u)) : A} \rightarrow \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t : A$$

- ...y los árboles de tipado se van reduciendo o contienen términos con tipos cada vez más “simples”.
- Esto es: todo término del  $\lambda$ -cálculo simplemente tipado es “normalizable”: lo podemos reducir hasta llegar a un término en forma normal (irreducible).

# Fundamentos: $\lambda$ -cálculo simplemente tipado

## Propiedades:

- En este sistema de tipos no hay solución para una ecuación de tipos de la forma  $A = A \rightarrow A$ .
  - ▶ Para que esto sí tenga solución tenemos que introducir tipos recursivos.
- Por lo tanto, hemos retirado términos que representen funciones que se aplican sobre sí mismas, como en  $\Omega$  y en  $Y$ .
  - ▶ Y en general, se puede probar que no hay operadores de punto fijo.<sup>12</sup>
- Tipado es decidible.

---

<sup>12</sup>Barendregt, H. P. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. North Holland, Amsterdam (1984).



# Fundamentos

## Correspondencia de Curry-Howard (fragmento).

$$\begin{array}{c} \frac{}{x:A \vdash_{\mathcal{T}} x:A} \\ \frac{\Gamma, x:A \vdash_{\mathcal{T}} t:B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \lambda x:A. t:A \rightarrow B} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t:A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} u:A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} tu:B} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t:A \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} u:B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} (t, u):A \times B} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t:A \times B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \pi_1 t:A} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t:A \times B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \pi_2 t:B} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{}{A \vdash_{\mathcal{L}} A} \\ \frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \wedge B} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \wedge B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A} \\ \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \wedge B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} B} \end{array}$$

# Fundamentos: Correspondencia de Curry-Howard

- Dado un término, podemos construir su derivación de tipos (y vice versa).
- Dada una derivación de tipos, podemos reconstruir la prueba (y vice versa).
- Entonces, extendiendo apropiadamente nuestro  $\lambda$ -cálculo, hay un isomorfismo  $T$  entre pruebas y términos tal que:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \leftrightarrow \hat{\Gamma} \vdash_{\mathcal{T}} t : T(A),$$

donde  $\hat{\Gamma}$  tiene hipótesis de la forma  $x : T(B)$ , para  $B$  en  $\Gamma$ .<sup>13</sup>

---

<sup>13</sup>1969, Howard, W.A. Aunque publicado recién en *The formulae-as-types notion of construction*. En *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus, and Formalism*. Academic Press, 1980.

# Fundamentos: Correspondencia de Curry-Howard

- “Connecting mathematical logic and computation, it ensures that some aspects of programming are absolute” (Philip Wadler)

# Fundamentos

## Tipos dependientes

- Martin-Löf, 1972 (y variaciones publicadas a posterior).
- Introduce tipos dependientes como forma de dar una explicación de predicados en lógica constructivista, basada en teoría de tipos.
- Tipo dependiente: una colección de tipos indexada por un cierto tipo  $A$ :

$A \rightarrow \mathcal{U}$ , con  $\mathcal{U}$  un "tipo" habitado por tipos (un universo)

# Fundamentos: Tipos dependientes

Tipos dependientes de interés: dado un tipo  $A$  y una familia de tipos  $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ :

- Tipo función dependiente, o  $\Pi$ -tipo:
  - ▶ Regla de formación:  $\Pi_{x:A} B(x)$ .
  - ▶ Regla de introducción: una abstracción  $\lambda$ .
  - ▶ Se va a corresponder con la noción de prueba intuicionista de una cuantificación universal.
- Tipo par dependiente, o  $\Sigma$ -tipo:
  - ▶ Regla de formación:  $\Sigma_{x:A} B(x)$ .
  - ▶ Regla de introducción: mediante un par ordenado.
  - ▶ Se va a corresponder con la noción de prueba intuicionista de un existencial.

Coq

# Coq

- Asistente de pruebas basado en un sistema de tipos dependientes (se aprovecha de la correspondencia de Curry-Howard).
- Ayuda en la construcción del término que representa a una prueba, y a su posterior verificación.
- Las pruebas que construiremos aquí no serán útiles para su comunicación a otra persona. El foco estará puesto en la verificación automática del objeto prueba.
- Ampliamente utilizado en esfuerzos de formalización de semántica de lenguajes de programación.

## *Cálculo de Construcciones Inductivas (CIC)*<sup>14</sup>

- Extensión del *Cálculo de Construcciones*: un  $\lambda$ -cálculo con tipos dependientes.
- Incluye un mecanismo para definir tipos inductivamente, un operador de punto fijo (restringido para recursión primitiva) y encaje de patrones.
- La riqueza expresiva del sistema de tipos me permite disponer de una lógica de alto orden.

---

<sup>14</sup>Paulin-Mohring C. *Introduction to the Calculus of Inductive Constructions*



# Coq: Cálculo de Construcciones Inductivas

- Se sabe que este cálculo posee propiedades deseables:
  - ▶ Normalización fuerte.
  - ▶ Canonicidad.
  - ▶ Consistencia relativa con respecto a ZFC.

# Coq: Cálculo de Construcciones Inductivas

## Sorts

- Los tipos habitan *universos*, llamados *sorts*.
- En CIC tenemos una jerarquía infinita de sorts:  
 $\{Prop\} \cup \{Set\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{Type_i\}$ .
  - ▶ Sort *Prop* está habitado por los tipos que representan proposiciones *proof-irrelevant*.
  - ▶ Sort *Set* está habitado por los tipos computacionalmente relevantes.
  - ▶  $Prop : Type_1$  y  $Set : Type_1$ .
  - ▶  $Type_i : Type_{i+1}$ , para evitar inconsistencias que surgen en sistemas donde existe un único sort *Type*.

# Coq

Ejemplo: números naturales como un tipo inductivo.

```
Inductive nat : Set :=
```

```
| 0 : nat
```

```
| S : nat → nat.
```

- Formador o constructor de tipos:
  - ▶ `nat` (que va a habitar el sort `Set`).
  - ▶ `nat` será el menor punto fijo de la función *generadora* (o *funcional*) definida por los constructores `0` y `S`.
- Reglas de introducción: constructores `0` y `S`.
- Reglas de eliminación: encaje de patrones (forma sintáctica más adelante) o *análisis por casos*.

# Coq

Ejemplo: números naturales como un tipo inductivo.

```
Inductive nat : Set :=
```

```
| 0 : nat
```

```
| S : nat → nat.
```

- Reglas de cómputo: deriva de la regla de reducción del encaje de patrones sobre un natural.
- Análisis por casos:
  - ▶ *Normalización fuerte* +
  - ▶ *Canonicidad* +
  - ▶ *Valores contruidos con constructores diferentes, son diferentes*

# Coq

Ejemplo: números naturales como un tipo inductivo.

```
Inductive nat : Set :=
```

```
| 0 : nat
```

```
| S : nat → nat.
```

- Principios de inducción: es una función! (donde  $\text{Sort} \in \{\text{Prop}, \text{SProp}, \text{Set}, \text{Type}\}$ ):

```
forall P : nat → Sort,
```

```
  P 0 →
```

```
  (forall n : nat, P n → P (S n)) →
```

```
  forall n : nat, P n
```

- Lógica de alto orden: basta con un principio cuantificado sobre todas las proposiciones posibles.

# Coq

Ejemplo: orden sobre los números naturales.

**Inductive** `le` (`n` : `nat`) : `nat` → `Prop` :=

| `le_n` : `le n n`

| `le_S` : **forall** `m` : `nat`, `le n m` → `le n (S m)`.

- `le` es la menor relación que satisface:
  - ▶  $\forall n : \mathbb{N} \cup \{0\}, le\ n\ n$
  - ▶  $\forall n, m : \mathbb{N} \cup \{0\}, le\ n\ m \Rightarrow le\ n\ (m + 1)$
- `le_n` y `le_S` definen un sistema formal completo y correcto para construir pruebas de cosas de la forma  $n \leq m$ .

# Coq

Ejemplo: tipo habitado por los primeros  $n$  números naturales.

```
Inductive fin (n : nat) : Set :=  
| elem_fin : forall (m : nat), le m n → fin n.
```

- Al construir habitantes de `fin`, es posible automatizar la generación de pruebas de `le m n`: *typeclasses*.

# Coq

Conectores lógicos y sus análogos vía Curry-Howard.

- Conjunción:

```
Inductive and (A B : Prop) : Prop := conj : A → B → A ∧ B.
```

```
Inductive prod (A B : Type) : Type := pair : A → B → A * B.
```

- Disyunción:

```
Inductive or (A B : Prop) : Prop :=
```

```
| or_introl : A → A ∨ B
```

```
| or_intror : B → A ∨ B.
```

```
Inductive sum (A B : Type) : Type :=
```

```
| inl : A → A + B
```

```
| inr : B → A + B.
```



# Coq

Conectores lógicos y sus análogos vía Curry-Howard.

- Cuantificación existencial:

```
Inductive ex (A : Type) (P : A → Prop) : Prop :=  
ex_intro : forall x : A, P x → exists y, P y.
```

```
Inductive sigT (A : Type) (P : A → Type) : Type :=  
existT : forall x : A, P x → {x : A & P x}.
```

- Cuantificación universal e implicación:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{T}} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{fun} x : A \Rightarrow t : A \rightarrow B} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{T}} t : B(x)}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{fun} x : A \Rightarrow t : \Pi_{x:A}, B(x)}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{T}} B : Prop}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \Pi_{x:A}, B : Prop} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{T}} B : Type_i \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} A : Type_i}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \Pi_{x:A}, B : Type_i}$$

# Coq

Conectivos lógicos y sus análogos vía Curry-Howard.

- Se corresponden con la noción intuicionista de prueba, y el tipo de los constructores se corresponden con las reglas de introducción del sistema de deducción natural.

# Coq

Forma general de una definición inductiva.

```
Inductive I pars : Ar := ...  
| c :  $\prod(x_1 : A_1)\dots(x_n : A_n)$ , I pars  $u_1\dots u_p$   
| ...
```

- pars are called the parameters of the inductive definition and will be the same for all definitions.
- Ar is called the arity. Tiene la forma  $\prod(y_1 : B_1)\dots(y_p : y_p)$ ,  $s$ , con  $s$  un Sort.
- $u_i$  is an index. Los tipos pueden estar indexados por cualquier expresión del lenguaje, además de permitir indexación por tipos
- $\prod(x_1 : A_1)\dots(x_n : A_n)$ , I pars  $u_1\dots u_p$  is a type of constructor.
- $A_i$  is a type of argument of constructor.

# Coq

Forma general de una definición inductiva.

```
Inductive I pars : Ar := ...  
| c :  $\prod(x_1 : A_1)\dots(x_n : A_n), I\ pars\ u_1\dots u_p$   
| ...
```

Hay condiciones (sintácticas) que se imponen para poder considerar una definición dada como *bien formada*.

- Para garantizar predicatividad.
- Para garantizar normalización fuerte.

# Coq

Construcciones restantes de CIC: operador de punto fijo para definir funciones recursivas.

**Fixpoint**  $f (x_1 : A_1) \dots (x_n : A_n) \{\text{struct } x_i\} : B := t.$

- $f : \prod(x_1 : A_1) \dots (x_n : A_n), B.$
- Sólo recursión primitiva: evaluaciones recursivas de  $f$  sólo sobre un término *estructuralmente* más pequeño que  $x_n$ .

# Coq

Construcciones restantes de CIC: operador de punto fijo para definir funciones recursivas.

**Fixpoint**  $f (x_1 : A_1) \dots (x_n : A_n) \{ \text{struct } x_i \} : B := t.$

- ...recursión general interactúa con el sistema de tipos: todo tipo termina estando habitado por términos superfluos (sin información).

**Fixpoint**  $\text{mal} (n : \text{nat}) : P := \text{mal } n.$

(\* para cualquier  $n$  y  $P$ ,  $\text{mal } n : P$  \*)

- ...inclusive Falso:

**Inductive**  $\text{False} : \text{Prop} := .$

- Sólo vamos a permitir funciones totales.

# Coq

Construcciones restantes de CIC: encaje de patrones.

```
Fixpoint sum (n : nat) : nat :=  
  match n with  
  | 0    => 0  
  | S n' => S n' + sum n'  
end.
```

- Funciones totales: tenemos que contemplar las 2 posibles formas de construir un natural.
- Implementa el principio de eliminación para tipos inductivos (positivos): me permite extraer la información con la que se construyó un valor.
- Puedo razonar por casos sobre un valor de cualquier tipo inductivo.

# Coq

Ejemplo de prueba:

**Lemma** `sum_expr` : `forall` (n : nat), `sum n = (n * (n + 1)) / 2`.

- Luego del punto final del comando **Lemma** entramos en modo interactivo de edición de prueba:

```
1 goal (ID 2)
```

```
-----  
forall n : nat, sum n = n * (n + 1) / 2
```

- Esto es el *proof state*: la colección de hipótesis que manejamos + el enunciado que tenemos que probar.
- Manipulamos el estado de la prueba mediante comandos llamados *tácticas*.



# Coq

Ejemplo de prueba:

**Lemma** `sum_expr` : **forall** (n : nat), sum n = (n \* (n + 1)) / 2.

- *Razonamiento hacia atrás*: partimos de la conclusión del árbol de prueba que queremos construir, y vamos hacia arriba, hacia las hojas del árbol.
- Coq nos va a ayudar a construir el objeto que representa a la prueba, llamado *proof term*.

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
Require Import
```

```
  Arith.Arith
```

```
  Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=
```

```
  match n with
```

```
  | 0   => 0
```

```
  | S n' => S n' + sum n'
```

```
  end.
```

```
Lemma sum_expr :  $\forall (n : N), \text{sum } n = (n * (n + 1)) / 2.$ 
```

```
Proof. |
```

```
1 goal (ID 2)
```

---

```
 $\forall n : N, \text{sum } n = n * (n + 1) / 2$ 
```

```
U:%%- *goals* All (3,12) (Coq Goals +2)
```

# Coq

Ejemplo de prueba:

- Razonamos por inducción en  $n$ . Podemos aplicar la función que representa el principio de inducción generado para `nat`, `nat_ind`:

```
forall P : nat → Prop,  
  P 0 →  
  (forall n : nat, P n → P (S n)) →  
  forall n : nat, P n
```

- La prueba será entonces un término de la forma:

```
fun n : nat ⇒ nat_ind P ... .. n.
```

- Podemos utilizar la táctica `induction n`:

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
Require Import
```

```
  Arith.Arith
```

```
  Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=
```

```
  match n with
```

```
  | 0   => 0
```

```
  | S n' => S n' + sum n'
```

```
  end.
```

```
Lemma sum_expr : ∀ (n : N), sum n = (n * (n + 1)) / 2.
```

```
Proof.
```

```
  induction n as [ | n' HI].
```

```
2 goals (ID 7)
```

---

```
sum 0 = 0 * (0 + 1) / 2
```

```
goal 2 (ID 10) is:
```

```
sum (S n') = S n' * (S n' + 1) / 2
```

```
U:%%- *goals* All (4,0) (Coq Goals +2)
```

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
Require Import
```

```
  Arith.Arith
```

```
  Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=
```

```
  match n with
```

```
  | 0   => 0
```

```
  | S n' => S n' + sum n'
```

```
  end.
```

```
Lemma sum_expr : ∀ (n : N), sum n = (n * (n + 1)) / 2.
```

```
Proof.
```

```
  induction n as [ | n' HI].
```

```
  = (* caso base *)
```

```
1 goal (ID 7)
```

---

```
sum 0 = 0 * (0 + 1) / 2
```

```
U:%%- *goals* All (4,0) (Coq Goals +2)
```

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
Require Import
```

```
  Arith.Arith
```

```
  Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=
```

```
  match n with
```

```
  | 0    => 0
```

```
  | S n' => S n' + sum n'
```

```
  end.
```

```
Lemma sum_expr : ∀ (n : N), sum n = (n * (n + 1)) / 2.
```

```
Proof.
```

```
  induction n as [ | n' HI].
```

```
  = (* caso base *)
```

```
    (* son términos definicionalmente iguales *)
```

```
  reflexivity.
```

```
1 goal
```

```
goal 1 (ID 10) is:
```

```
sum (S n') = S n' * (S n' + 1) / 2
```

```
U:%%- *goals* All (4,0) (Coq Goals +2)
```

This subproof is complete, but there are some unfocused goals.

Focus next goal with bullet -.

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
Require Import
```

```
  Arith.Arith
```

```
  Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=
```

```
  match n with
```

```
  | 0    => 0
```

```
  | S n' => S n' + sum n'
```

```
  end.
```

```
Lemma sum_expr : ∀ (n : N), sum n = (n * (n + 1)) / 2.
```

```
Proof.
```

```
  induction n as [ | n' HI].
```

```
  = (* caso base *)
```

```
    (* son términos definicionalmente iguales *)
```

```
    reflexivity.
```

```
  = (* caso inductivo *)
```

```
1 goal (ID 10)
```

```
- n' : N
```

```
- HI : sum n' = n' * (n' + 1) / 2
```

---

```
sum (S n') = S n' * (S n' + 1) / 2
```

```
U:%%- *goals* All (6,0) (Coq Goals +2)
```

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
Require Import
```

```
  Arith.Arith
```

```
  Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=
```

```
  match n with
```

```
  | 0    => 0
```

```
  | S n' => S n' + sum n'
```

```
  end.
```

```
Lemma sum_expr : ∀ (n : N), sum n = (n * (n + 1)) / 2.
```

```
Proof.
```

```
  induction n as [ | n' HI].
```

```
  - (* caso base *)
```

```
    (* son términos definicionalmente iguales *)
```

```
    reflexivity.
```

```
  - (* caso inductivo *)
```

```
    (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)
```

```
    unfold sum.
```

```
    fold sum.
```

```
1 goal (ID 13)
```

```
- n' : N
```

```
- HI : sum n' = n' * (n' + 1) / 2
```

---

```
S n' + sum n' = S n' * (S n' + 1) / 2
```

```
U:%%- *goals* All (6,0) (Coq Goals +2)
```



# Coq

## Ejemplo de prueba:

### Require Import

```
Arith.Arith  
Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=  
  match n with  
  | 0    => 0  
  | S n' => S n' + sum n'  
  end.
```

```
Lemma sum_expr : ∀ (n : N), sum n = (n * (n + 1)) / 2.
```

```
Proof.
```

```
  induction n as [ | n' HI].  
  - (* caso base *)  
    (* son términos definicionalmente iguales *)  
    reflexivity.  
  - (* caso inductivo *)  
    (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)  
    unfold sum.  
    fold sum.  
    (* aplicamos H.I. *)  
    rewrite HI.
```

```
1 goal (ID 14)
```

```
- n' : N
```

```
- HI : sum n' = n' * (n' + 1) / 2
```

---

```
S n' + n' * (n' + 1) / 2 = S n' * (S n'
```

```
*2
```

```
U:%%- *goals* All (6,0) (Coq Goals +2)
```

# Coq

## Ejemplo de prueba:

### Require Import

```
Arith.Arith  
Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=  
  match n with  
  | 0    => 0  
  | S n' => S n' + sum n'  
  end.
```

```
Lemma sum_expr : ∀ (n : N), sum n = (n * (n + 1)) / 2.
```

```
Proof.  
  induction n as [ | n' HI].  
  - (* caso base *)  
    (* son términos definicionalmente iguales *)  
    reflexivity.  
  - (* caso inductivo *)  
    (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)  
    unfold sum.  
    fold sum.  
    (* aplicamos H.I. *)  
    rewrite HI.  
    (* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)  
    replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)
```

```
1 goal (ID 18)
```

```
- n' : N
```

```
- HI : sum n' = n' * (n' + 1) / 2
```

---

```
S n' + n' * S n' / 2 = S n' * (S n' + 1)
```

```
U:%%- *goals* All (6,0) (Coq Goals +2)
```

# Coq

## Ejemplo de prueba:

### Require Import

```
Arith.Arith  
Lia.
```

```
Fixpoint sum (n : N) : N :=  
  match n with  
  | 0    => 0  
  | S n' => S n' + sum n'  
  end.
```

Lemma sum\_expr :  $\forall (n : N)$ ,  $\text{sum } n = (n * (n + 1)) / 2$ .

```
Proof.  
  induction n as [ | n' HI].  
  - (* caso base *)  
    (* son términos definicionalmente iguales *)  
    reflexivity.  
  - (* caso inductivo *)  
    (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)  
    unfold sum.  
    fold sum.  
    (* aplicamos H.I. *)  
    rewrite HI.  
    (* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)  
    replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)  
    (* Nat.add_comm: forall n m : nat, n + m = m + n *)  
    rewrite Nat.add_comm.
```

1 goal (ID 39)

— n' : N

— HI :  $\text{sum } n' = n' * (n' + 1) / 2$

---

$n' * S n' / 2 + S n' = S n' * (S n' + 1)$

U: %N- \*goals\* All (6,0) (Coq Goals +2)

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
= (* caso base *)
  (* son términos definicionalmente iguales *)
  reflexivity.
= (* caso inductivo *)
  (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)
  unfold sum.
  fold sum.
  (* aplicamos H.I. *)
  rewrite HI.
  (* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)
  replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)
  (* Nat.add_comm: forall n m : nat, n + m = m + n *)
  rewrite Nat.add_comm.
  (* Nat.div_add:
     forall a b c : nat, c <> 0 -> (a + b * c) / c = a / c + b *)
  rewrite ← Nat.div_add.
```

2 goals (ID 40)

```
— n' : N
— HI : sum n' = n' * (n' + 1) / 2
```

---

$(n' * S n' + S n' * 2) / 2 = S n' * (S n' + 1) / 2$

goal 2 (ID 41) is:  
2 ≠ 0

U: %N- \*goals\* All (6,0) (Coq Goals +2)

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
= (* caso base *)
  (* son términos definicionalmente iguales *)
  reflexivity.
= (* caso inductivo *)
  (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)
  unfold sum.
  fold sum.
  (* aplicamos H.I. *)
  rewrite HI.
  (* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)
  replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)
  (* Nat.add_comm: forall n m : nat, n + m = m + n *)
  rewrite Nat.add_comm.
  (* Nat.div_add:
     forall a b c : nat, c <> 0 -> (a + b * c) / c = a / c + b *)
  rewrite ← Nat.div_add.
± [I] (* (n' * S n' + S n' * 2) / 2 = S n' * (S n' + 1) / 2 *)
```

```
1 goal (ID 40)
```

```
— n' : N
```

```
— HI : sum n' = n' * (n' + 1) / 2
```

---

```
(n' * S n' + S n' * 2) / 2 = S n' * (S n' + 1) / 2
```

U:%%- \*goals\* All (6,0) (Coq Goals +2)

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
= (* caso base *)
(* son términos definicionalmente iguales *)
reflexivity.
= (* caso inductivo *)
(* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)
unfold sum.
fold sum.
(* aplicamos H.I. *)
rewrite HI.
(* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)
replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)
(* Nat.add_comm: forall n m : nat, n + m = m + n *)
rewrite Nat.add_comm.
(* Nat.div_add:
  forall a b c : nat, c <> 0 -> (a + b * c) / c = a / c + b *)
rewrite ← Nat.div_add.
± (* (n' * S n' + S n' * 2) / 2 = S n' * (S n' + 1) / 2 *)
replace (n' * S n' + S n' * 2) with (S n' * (S n' + 1)) by lia.
```

1 goal (ID 45)

— **n'** : N

— **HI** : sum n' = n' \* (n' + 1) / 2

---

S n' \* (S n' + 1) / 2 = S n' \* (S n' + 1)

U:%%- \*goals\* All (6,0) (Coq Goals +2)

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
= (* caso base *)
  (* son términos definicionalmente iguales *)
  reflexivity.
= (* caso inductivo *)
  (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)
  unfold sum.
  fold sum.
  (* aplicamos H.I. *)
  rewrite HI.
  (* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)
  replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)
  (* Nat.add_comm: forall n m : nat, n + m = m + n *)
  rewrite Nat.add_comm.
  (* Nat.div_add:
     forall a b c : nat, c <> 0 -> (a + b * c) / c = a / c + b *)
  rewrite ← Nat.div_add.
± (* (n' * S n' + S n' * 2) / 2 = S n' * (S n' + 1) / 2 *)
  replace (n' * S n' + S n' * 2) with (S n' * (S n' + 1)) by lia.
  reflexivity.
```

1 goal

goal 1 (ID 41) is:

2 ≠ 0

U:100% \*goals\* All (4,0) (Coq Goals +2)

This subproof is complete, but there are unfocused goals.

Focus next goal with bullet +.

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
= (* caso base *)
  (* son términos definicionalmente iguales *)
  reflexivity.
= (* caso inductivo *)
  (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)
  unfold sum.
  fold sum.
  (* aplicamos H.I. *)
  rewrite HI.
  (* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)
  replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)
  (* Nat.add_comm: forall n m : nat, n + m = m + n *)
  rewrite Nat.add_comm.
  (* Nat.div_add:
     forall a b c : nat, c <> 0 -> (a + b * c) / c = a / c + b *)
  rewrite ← Nat.div_add.
± (* (n' * S n' + S n' * 2) / 2 = S n' * (S n' + 1) / 2 *)
  replace (n' * S n' + S n' * 2) with (S n' * (S n' + 1)) by lia.
  reflexivity.
± (* 2 <> 0 *)
```

1 goal (ID 41)

```
- n' : ℕ
- HI : sum n' = n' * (n' + 1) / 2
```

---

2 ≠ 0

U:%%- \*goals\* All (6,0) (Coq Goals +2)



# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
= (* caso base *)
  (* son términos definicionalmente iguales *)
  reflexivity.
= (* caso inductivo *)
  (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)
  unfold sum.
  fold sum.
  (* aplicamos H.I. *)
  rewrite HI.
  (* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)
  replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)
  (* Nat.add_comm: forall n m : nat, n + m = m + n *)
  rewrite Nat.add_comm.
  (* Nat.div_add:
     forall a b c : nat, c <> 0 -> (a + b * c) / c = a / c + b *)
  rewrite ← Nat.div_add.
± (* (n' * S n' + S n' * 2) / 2 = S n' * (S n' + 1) / 2 *)
  replace (n' * S n' + S n' * 2) with (S n' * (S n' + 1)) by lia.
  reflexivity.
± (* 2 <> 0 *)
  lia.
```

U:%%- \*goals\* All (1,0) (Coq Goals +2)

No more goals.

# Coq

## Ejemplo de prueba:

```
= (* caso base *)
  (* son términos definicionalmente iguales *)
  reflexivity.
= (* caso inductivo *)
  (* reducimos sum (S n) para poder usar la H.I. *)
  unfold sum.
  fold sum.
  (* aplicamos H.I. *)
  rewrite HI.
  (* simple reducción no me ayuda a probar el objetivo *)
  replace (n' + 1) with (S n') by lia. (* por def. de + *)
  (* Nat.add_comm: forall n m : nat, n + m = m + n *)
  rewrite Nat.add_comm.
  (* Nat.div_add:
     forall a b c : nat, c <> 0 -> (a + b * c) / c = a / c + b *)
  rewrite ← Nat.div_add.
± (* (n' * S n' + S n' * 2) / 2 = S n' * (S n' + 1) / 2 *)
  replace (n' * S n' + S n' * 2) with (S n' * (S n' + 1)) by lia.
  reflexivity.
± (* 2 <> 0 *)
  lia.
```

Qed.

U:%%- \*goals\* All (1,0) (Coq Goals +2)

# Coq

Ejemplo de prueba: vemos el término construido.

```
sum_expr = fun n : nat =>
  nat_ind
  (fun n0 : nat => sum n0 = n0 * (n0 + 1) / 2)
  eq_refl
  (fun (n' : nat) (HI : sum n' = n' * (n' + 1) / 2) => ...)
  n
```

# Nuestro trabajo

# Nuestro trabajo

## Qué hacemos

- Formalización de la semántica dinámica y estática de lenguajes de programación *reales*.
  - ▶ Existen compiladores/intérpretes (demasiado complejos).
  - ▶ Hay manuales de referencia (informales).
- Queremos elaborar un modelo del lenguaje sobre el cual sea posible:
  - ▶ Verificar propiedades de corrección de la semántica informal (Ej., todo error durante la ejecución es reconocido por la semántica dinámica; un programa correctamente tipado se ejecuta sin errores de tipo).
  - ▶ Desarrollar herramientas de análisis de código.

# Nuestro trabajo: Qué hacemos

## Formalismo:

- Semántica operacional:
  - ▶ Útil para demostrar propiedades de sistemas de tipos.
  - ▶ Próxima a la forma en la que informalmente se piensa y se presenta la semántica de un lenguaje (ej., en manuales de referencia).
- Semántica de reducciones con contextos de evaluación:
  - ▶ Enfoque inspirado en ideas del  $\lambda$ -cálculo (Peter Landin).
  - ▶ Definiciones concisas, semántica modular.
  - ▶ Empleada (parcialmente) en esfuerzos de formalización de lenguajes varios (Python, Scheme, varias versiones de JavaScript, Lua 5.1 y 5.2).

# Nuestro trabajo: Qué hacemos

## PLT Redex

- Lenguaje de dominio específico implementado sobre Racket.
- Útil para mecanizar semánticas de reducciones con contextos de evaluación.

# PLT Redex

## Definición de una gramática en Redex

```
#lang racket

(require redex)

(define-language core-lang
  ; terms as compiled from Lua code
  [sing \;
   break
   (return e ...)
   ($statFCall e (e ...))
   ($statFCall e : Name (e ...))
   (var_1 var_2 ... = e ...)
   (do s end)
   (if e then s else s end)
   (while e do s end)
   ($iter e do s end)
   (local Name_1 Name_2 ... = e ... in s end)])
```



# PLT Redex

## Definición de una relación semántica en Redex

```
#lang racket
; Expressions that don't interact with some store

(require redex
         "../grammar.rkt"
         "../Meta-functions/grammarMetaFunctions.rkt"
         "../Meta-functions/delta.rkt")

(define terms-rel
  (reduction-relation
   ext-lang |
   #:arrow -->s/e

   ; tuples
   [-->s/e (in-hole Et (< v_1 v_2 ... >))
          (in-hole Et v_1)
          E-TruncateNonEmptyTuple]

   [-->s/e (in-hole Et (< >))
          (in-hole Et nil)
          E-TruncateEmptyTuple]

   [-->s/e (in-hole Ea (< v_1 ... >))
          (fix_unwrap Ea (v_1 ...))
          E-UnwrapNonEmptyTuple])
```

# PLT Redex

## Definición de una relación mediante reglas de inferencia

```
; constraints for a list of expression (for example, for actual parameters of
; a fun call)
(define-judgment-form
  core-lang-typed
  #:mode (cons_gen_e1 I I 0 0 0)
  #:contract (cons_gen_e1  $\gamma$  (e ...) ( $\tau$  ...)  $\gamma$  Cs)

  [(cons_gen  $\gamma_1$  e  $\tau$   $\gamma_2$  Cs)
   -----
   (cons_gen_e1  $\gamma_1$  (e) ( $\tau$ )  $\gamma_2$  Cs)]

  [(cons_gen  $\gamma_1$  e_1  $\tau_1$   $\gamma_2$  Cs_1)
   (cons_gen_e1  $\gamma_2$  (e_2 e_3 ...) ( $\tau_2$  ...)  $\gamma_3$  Cs_2)
   (where Cs_3 (cons_un Cs_1 Cs_2))
   -----
   (cons_gen_e1  $\gamma_1$  (e_1 e_2 e_3 ...) ( $\tau_1$   $\tau_2$  ...)  $\gamma_3$  Cs_3)]
  )
```

# PLT Redex

- Otras facilidades de Redex
  - ▶ Testeo aleatorio de propiedades.
  - ▶ Visualización de trazas de reducción.
  - ▶ Facilidades para implementar suite de tests.
- Qué no puede hacer Redex:
  - ▶ Asistir en la demostración de propiedades.
  - ▶ Ofrecer garantías estáticas de corrección.


# PLT Redex

## Problema

- No hay facilidades para exportar un modelo Redex hacia un asistente de pruebas.
- Nos vemos en la obligación de descartar un modelo ya testeado e implementarlo desde 0 en un asistente de pruebas.

# PLT Redex

## La experiencia $\lambda_{JS}$ :

 <https://blog.brownplt.org/2012/06/04/lambdajs-coq.html>

Redex can also generate [random tests to exercise your semantics](#). Random testing caught several more bugs in  $\lambda_{JS}$ .

### Coq: A Machine-Checked Proof

Testing is not enough. We shipped  $\lambda_{JS}$  with a bug that breaks the soundness theorem above. We didn't discover it for a year. [David van Horn](#) and [Ian Zerny](#) both reported it to us independently. We'd missed a case in the semantics, which caused certain terms to get "stuck". It turned out to be a [simple fix](#), but we were left wondering if anything else was left lurking.

To gain further assurance, we mechanized  $\lambda_{JS}$  with the [Coq proof assistant](#). The soundness theorem now has a [machine-checked proof of correctness](#). You still need to read the [Coq definition of  \$\lambda\_{JS}\$](#)  and ensure it matches your intuitions. But once that's done, you can be confident that the proofs are valid.

Doing this proof was surprisingly easy, once we'd read [Software Foundations](#) and [Certified Programming with Dependent Types](#). We'd like to thank Benjamin Pierce and his co-authors, and Adam Chlipala, for putting their books online.

# PLT Redex

## Propuesta:

- Implementar en Coq la semántica de Redex, basándonos en lo propuesto en *A Semantics for Context-Sensitive Reduction Semantics*, de Klein et. al.
- Extender el modelo con facilidades ausentes.
- Implementar una librería de tácticas para facilitar la demostración de propiedades.
- Implementar una rutina de traducción de un modelo Redex hacia un (idealmente) equivalente semánticamente en Coq.

# PLT Redex

## Logros parciales

- Mecanizamos el modelo presentado en la bibliografía citada.
  - ▶ Algoritmo de encaje de patrones original no es una recursión primitiva.
  - ▶ Definimos una versión más general del algoritmo.
  - ▶ Definimos una relación *bien fundada* sobre los valores de entrada del algoritmo.
  - ▶ Probamos la buena fundación de la relación.
  - ▶ Mecanizamos el algoritmo mediante *recursión bien fundada*: recursión primitiva sobre la estructura de la prueba de accesibilidad de cada elemento en la relación.

# PLT Redex

## Logros parciales

- Reprodujimos la prueba de completitud del paper original, para nuestro modelo mecanizado en Coq.
- Extendimos el modelo con una noción de *clausura de kleene*.



# PLT Redex

Logros parciales: ¡testeando, encontramos errores en una versión reciente de Redex!

→ ↻ <https://github.com/racket/redex/commit/817c18d61e72b9d2f6b58de65d97181ac8da2009#diff-11c6448c00a1872fd2062f76244> 130%

Most Visited Getting Started

## fix bug in matcher

Thanks to Mallku Ernesto Soldevila Raffa for finding the bug

master  
v8.10 v8.4

**rfindler** committed on Dec 21, 2021

Showing 2 changed files with 29 additions and 1 deletion.

Filter changed files

- redex-lib/redex/private
  - matcher.rkt
- redex-test/redex/tests
  - tl-language.rkt

redex-lib/redex/private/matcher.rkt

```
↑ 00 -728,7 +728,7 00 See match-a-pattern.rkt for more details
728 728 (define (build-compiled-pattern proc names lang-α-equal?)
729 729 (make-compiled-pattern
730 730 proc
731 731 - (null? names)
+ (not (null? names))
732 732
733 733 ;; none of the names are duplicated
734 734 (and (equal? names (remove-duplicates names))
```

# PLT Redex

Logros parciales: hacia una teoría mecanizada sobre la decibilidad de predicados de semántica de reducciones estilo Redex.

- Comenzamos a experimentar con formas de automatizar casos particulares del problema de intersección de lenguajes, para el caso de lenguajes definidos con el formalismo de Redex.
- Construimos tipos finitos de lenguajes y patrones de tamaño acotado. Nos interesaría generalizar la técnica empleada a tipos con constructores como los utilizados en nuestro caso para definir lenguajes y patrones.

¡Gracias!